MAI 1 – řešení domácího úkolu 11-1:

(Řešení už píšu stručněji, pokud by něco nebylo jasné, prosím, pište nebo volejte, dohodneme si konzultaci online)

(1.)
$$\underbrace{\int \frac{1}{x-3\sqrt{x}+9}\,dx}_{x\in(0,+\infty)} \underset{\text{substituce (2VS)}}{=} \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t \quad \equiv \varphi^{-1}(x) \\ x = t^2 \ (\equiv \varphi(t)) \\ dx = 2t\,dt \quad (\text{neboť } \varphi'(t)=2t) \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{1}{t^2-3t+9}\cdot 2t\,dt \underset{(*)}{=} \int \frac{2t-3}{t^2-3t+9}\,dt + 3\int \frac{1}{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}}\,dt =$$

$$= \ln|t^2-3t+9| + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)+C \underset{(\text{„zpět" k } x)}{=}$$

$$= \underline{\ln\left(x-3\sqrt{x}+9\right) + \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{x}-\frac{3}{2}\right)\right)+C}$$

(omlouvám se za zadání, asi mělo být $(x-4\sqrt{x}+9)$)

a pomocné výpočty:

„(i)" $$\int \frac{2t-3}{t^2-3t+9}\,dt = \int \frac{(t^2-3t+9)'}{t^2-3t+9}\,dt \underset{VS}{=} \ln|t^2-3t+9|+C_1$$
$$\left(\int \frac{g'(t)}{g(t)}\,dt = \ln|g(t)|\right)$$

(ii) $$\int \frac{1}{t^2-3t+9} = \int \frac{1}{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{27}{4}}\,dt = \frac{4}{27}\int \frac{1}{\left[\frac{2}{\sqrt{27}}\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]^2+1}\,dt =$$

„převedeme" na $\int \frac{1}{u^2+1}\,du$,

neboť jmenovatel nemá reálné kořeny („doplnění na čtverec")
$$= \frac{4}{27}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{27}}\right)^{-1}\mathrm{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{27}}\left(t-\frac{3}{2}\right)\right)+C_2$$

a pak po „vložení" (i) a (ii), integrál „před $\underset{(*)}{=}$" napsaný jako součet násobků integrálů (i) a (ii)

„nebo"

$$\underset{x\in\mathbb{R}}{\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx} = \left| \begin{array}{l} x = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \ (= \sinh t)\ (\equiv \varphi(t)),\ t\in\mathbb{R} \\ t = \ln(x+\sqrt{1+x^2})\ (\equiv \varphi^{-1}(x)),\ x\in\mathbb{R} \\ dx = \cosh t\, dt\ \left(\text{neboť } \varphi'(t) = \frac{e^t+e^{-t}}{2}\ (\equiv \cosh t)\right) \end{array} \right|$$

$$\underset{VS}{=} \int \frac{1}{\cosh t}\cdot \cosh t\, dt = \int dt = t + C = \underline{\ln(x+\sqrt{1+x^2}) + C}$$

$$\left(\sqrt{x^2+1} = \sqrt{\sinh^2 t + 1} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t \ (\cosh t > 0 \text{ v } \mathbb{R}) \right)$$

(platí: $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ – proto asi „hyperbolický" sinus a kosinus)

② (i)

$$\underset{x\in(0,+\infty)}{\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x} = t \quad (\equiv \varphi^{-1}(x)) \\ x = t^2 \quad (\equiv \varphi(t)) \\ dx = 2t\,dt \quad (\text{neboť } \varphi'(t) = 2t) \end{array} \right| =$$

(substituce a pak per partes)

$$= \int \operatorname{arctg} t \cdot 2t\,dt \underset{PP}{=} \left| \begin{array}{ll} u' = 2t & u = t^2 \\ v = \operatorname{arctg} t, & v' = \frac{1}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= t^2 \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2(+1-1)}{t^2+1}\,dt = t^2 \operatorname{arctg} t - \int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right) dt =$$

$$= t^2 \operatorname{arctg} t + \operatorname{arctg} t - t + C \underset{\text{„zpět" k } x}{=}$$

$$= \underline{x \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C}, \quad C\in\mathbb{R}$$

(ii) $\displaystyle\int \arcsin^2 x\, dx = \left| \begin{array}{l} \arcsin x = t, \quad x \in (-1,1) \\ x = \sin t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ dx = \cos t\, dt \quad (\text{neboť } \varphi'(t) = \cos t) \end{array} \right| =$

$x \in (-1,1)$

$$\underset{VS}{=} \int t^2 \cdot \cos t\, dt \underset{(2\times pp)}{=} \left| \begin{array}{ll} u' = \cos t, & u = \sin t \\ v = t^2, & v' = 2t \end{array} \right| =$$

$$= t^2 \sin t - 2\int t \sin t\, dt = \left| \begin{array}{ll} u' = +\sin t, & u = -\cos t \\ v = t, & v' = 1 \end{array} \right| =$$

$$= t^2 \sin t - 2\left(-t\cos t + \int \cos t\, dt\right) = t^2 \sin t + 2t\cos t - 2\sin t + C =$$

$$\underset{(\text{„zpět" k } x)}{=} x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C, \quad C \in \mathbb{R}, \ x \in (-1,1)$$

(v úpravě bylo „užito": $\sin(\arcsin x) = x$ a
$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2}$,
neboť $\cos t > 0$ pro $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$)

3 Per partes + substituce:

(i) $\displaystyle\int \ln(x + \sqrt{1+x^2})\, dx \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{ll} u' = 1, & u = x \\ v = \ln(x+\sqrt{1+x^2}), & v' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \end{array} \right| =$

$x \in \mathbb{R}$

$$= x \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = x \ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C,$$

$C \in \mathbb{R}$

a podrobněji:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \int \frac{(1+x^2)'}{2\sqrt{1+x^2}}\, dx \underset{VS}{=} \int \frac{1}{2\sqrt{t}}\, dt = \sqrt{t} + C \Big|_{t = 1+x^2 = g(x)} = \sqrt{1+x^2} + C$$

(ii) $\underline{\int \arcsin^2 x \, dx} \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{l} u' = 1 \quad u = x \\ v = \arcsin^2 x, \ v' = 2 \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right| =$

(obrácené" než minule „způsobem")

$$= x \arcsin^2 x - 2 \int \arcsin x \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \underset{pp}{\overset{(*)}{=}} \left| \begin{array}{l} u' = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \ u = -\sqrt{1-x^2} \\ v = \arcsin x, \ v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array} \right|$$

$$= x \arcsin^2 x - 2 \left(-\sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x + \int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \right) =$$

$$= \underline{x \arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C \ , \ C \in \mathbb{R}, \ x \in (-1,1)}$$

v (*): je „dobré" vidět v součinu, získaném per partes („popisné")
že z $x \cdot \arcsin x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ „patří" k sobě $x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ a

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\int \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} \, dx = -\sqrt{1-x^2} + C$$

(analogické minulému příkladu)

(iii) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx = \int \operatorname{arctg} x \, dx \, dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx =$

$$\underline{x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C, \ x \in \mathbb{R}}$$

<u>Návod:</u> Je „vidět", že $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx = \int \operatorname{arctg} x \cdot (\operatorname{arctg} x)' \, dx = \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2}$
(jednoduché) – tak se integrál zadaný „rozdělí" VS

$$\frac{x^2 \cdot \operatorname{arctg} x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x^2+1} \operatorname{arctg} x \quad \text{a}$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{l} u' = 1 \quad u = x \\ v = \operatorname{arctg} x \\ v' = \frac{1}{1+x^2} \end{array} \right| = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \cdots$$

Integrace racionálních funkcí („trénink")

1. <u>Parciální zlomky</u>

(tj. zlomky, na které se racionální funkce „rozloží")

a) (*) $$\int \frac{1}{x^2-4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx = \operatorname{arctg}(x-2)+C\,,\quad x\in\mathbb{R}$$

$x\in\mathbb{R}$

(buď substituce nebo „skoro" tabulka – viz rámeček)

$$\int \frac{3}{x^2-4x+8}\,dx = 3\int \frac{1}{(x-2)^2+4}\,dx = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2+1}\,dx =$$

$x\in\mathbb{R}$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{2}\right)+C$$

(místo substituce lze užít „vnitřní" derivaci – ukazovali jsme si: je-li $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, pak $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}+C$ $(a\neq 0)$ v odpovídajících intervalech)

(**) $$\int \frac{2x-4}{x^2-4x+8}\,dx = \int \frac{(x^2-4x+8)'}{x^2-4x+8} \overset{}{\underset{VS}{=}} \ln(x^2-4x+8)+C\,,\quad x\in\mathbb{R}$$

$(x^2-4x+8>0$ v $\mathbb{R})$

$$\int \frac{x-2}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 4\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 4\operatorname{arctg}(x+2)+C\,,$$

$x\in\mathbb{R}$

(integrál „napíšeme" jako kombinaci integrálů typu (**) – tj. $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$ a typu (*), tj. $\int \frac{1}{(x+a)^2+1}\,dx$

b) $I_2 = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C,\ x \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$

Výpočet I_2 – integrujeme $I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ per partes :

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \underset{pp}{=} \left| \begin{array}{ll} u' = 1 & u = x \\ v = \frac{1}{1+x^2}, & v' = \frac{-1}{(1+x^2)^2}\cdot 2x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2(+1-1)}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{x}{1+x^2} + 2\int\left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right)dx,$$

tedy máme : $I_1 = \frac{x}{1+x^2} + 2I_1 - 2I_2$, a odtud

$$\underline{I_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + I_1\right) = \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C}$$

<u>A obecněji :</u> $I_{n+1} = \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx$, pak

(v přednášce 10.)

$$\underline{I_{n+1} = \frac{1}{2n}\,\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\,I_n,\quad n \in \mathbb{N}} \qquad (*)$$

Integruje se opět integrál I_n pp :

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u' = 1, & u = x \\ v = \frac{1}{(1+x^2)^n}, & v' = \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2(+1-1)}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right)$$

a odtud již snadno k (*).

$$\int \frac{x-2}{(x^2+2x+4)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+4)^2} - 3\int \frac{1}{((x+1)^2+3)^2}\,dx$$

$x \in R$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+2x+4)'}{(x^2+2x+4)^2}\,dx - \frac{3}{9}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2+2x+4} + \frac{3}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+4} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + C$$

<u>neboť</u>: $\underline{\int \frac{(x^2+2x+4)'}{(x^2+2x+4)^2}\,dx} \underset{\substack{VS \\ x^2+2x+4=t}}{=} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + c = -\frac{1}{x^2+2x+4} + c_1$

a $\underline{\int \frac{1}{\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)^2}\,dx} \underset{VS}{=} \left| \begin{array}{l} \frac{x+1}{\sqrt{3}} = t \\ x = \sqrt{3}t - 1 \quad (\equiv g(t)) \\ dx = \sqrt{3}\,dt \quad (g'(t) = \sqrt{3}) \end{array} \right| =$

$$= \sqrt{3}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{t}{1+t^2} + \operatorname{arctg} t\right) + c_2 =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\frac{x+1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{(x+1)^2}{3}} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c_1 \quad (*)$$

$$\left(= \frac{3}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+4} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)\right) + c_1 \right.$$

(úpravy raději překontrolujte, nebo nechte ve tvaru (*)))

2. Integrace racionální funkce

a) 1) $\displaystyle\int \frac{2x-11}{x^2+3x-10}\,dx = \int \frac{2x-11}{(x-2)(x+5)}\,dx = \int \frac{A}{x-2}\,dx + \int \frac{B}{x+5}\,dx =$

$= A \ln|x-2| + B \ln|x+5| + \text{konst}, \quad x \neq 2, -5$

$= -\ln|x-2| + 3\ln|x+5| + \text{konst}, \quad x \neq 2,\ x \neq -5$

a rozklad: $\displaystyle\frac{2x-11}{x^2+3x-10} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5} \quad x \neq 2, -5$, tj.

(*) $2x-11 = A(x+5) + B(x-2)$ (ze spojitosti i pro $x = 2, -5$)

dosazením $x = 2$: $7A = -7 \Rightarrow A = -1$

$x = -5$: $-7B = -21 \Rightarrow B = 3$

nebo srovnáním koeficientů polynomů v (*) (u stejných mocnin)

u x: $A + B = 2$

x^0: $5A - 2B = -11$

(opět – soustava má řešení $A = -1$, $B = 3$)

(někdo raději nejprve „zjistí" koeficienty v rozkladu a pak integruje – záleží na vás)

2) $\displaystyle\int \frac{3x+9}{x^3+2x^2-x-2}\,dx$;

funkce je „ryze lomená", tedy pro rozklad je třeba rozložit jmenovatele na kořenové činitele:

$x^3+2x^2-x-2 \underset{(\text{úpr.})}{=} x^2(x+2) - (x+2) = (x+2)(x^2-1) =$

$= (x+2)(x+1)(x-1)$

a teď" tedy nejdříve rozložíme integrovanou fci na „parciální" zlomky:

$$\frac{3x+9}{(x+2)(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-1} \quad \text{pro } x \neq 1,-1,-2\,,$$

tj.: $$3x+9 = A(x^2-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)(x+1)$$

(lze už pro $\forall x \in R$)

a dosazením kořenů dostaneme:

$x = 1$: $\quad 6C = 12 \Rightarrow C = 2$

$x = -1$: $\quad -2B = 6 \Rightarrow B = -3$

$x = -2$: $\quad 3A = 3 \Rightarrow A = 1$

(nebo lze sestavit rovnice pro A, B, C ze srovnání koeficientů u „stejných" mocnin)

a tedy:

$$\int \frac{3x+9}{x^3+2x^2-x-2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx - 3\int \frac{1}{x+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= \ln|x+2| - 3\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C,$$

$x \in (-\infty,-2)$, $x \in (-2,-1)$, $x \in (-1,1)$, $x \in (1,+\infty)$

(nebo asi lze i „stručně" „ $x \in R \setminus \{1,-1,-2\}$ ")

3) $$\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-3x-2}\,dx\,; \qquad (*)\quad x \neq 2,-1$$

opět „musíme" rozložit jmenovatele (i zde je to „vidět", že jeden kořen je $x=-1$ a jeden $x=2$, tj. dostaneme, že $x^3-3x-2 = (x-2)(x+1)^2$ (např. dělením) a odtud: (*) a rozklad:

$$\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad , \; x \neq 2, -1$$

<u>a odtud:</u> $\quad 3x^2+2x+2 = A(x+1)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x-2) \; , \; x \neq 2, -1$

ale i pro $x = 2, -1$ (ze spojitosti)

<u>a dosazením:</u> $\quad x = 2: \quad 9A = 18 \Rightarrow \underline{A = 2}$

$x = -1: \quad -3C = 3 \Rightarrow \underline{C = -1}$

a třeba $\quad x = 0: \quad A - 2B - 2C = 2$, tj. $-2B = -2 \Rightarrow \underline{B = 1}$

<u>nebo srovnáním koeficientů</u>

$$\begin{aligned} &u\ x^2: & A + B &= 3 \\ &u\ x: & 2A - B + C &= 2 \\ &u\ x^0: & A - 2B - 2C &= 2 \end{aligned}$$

(a soustava má jediné řešení: $(A, B, C) = (2, 1, -1)$)

Tedy:

$$\underline{\int \frac{3x^2+2x+2}{x^3-3x+2}\,dx} = 2\int \frac{1}{x-2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \underline{2\ln|x-2| + \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C} \; ,$$

$x \neq 2, x \neq -1, C \in \mathbb{R}$

b) 1) $\quad \displaystyle\int \frac{5x^2+2x+3}{x^3+x^2-2}\,dx$

opět – fce integrovaná je „ryze lomená", tak začneme rozkladem jmenovatele: – je „vidět", že $x = 1$ je kořenem a tak (např.)

$$x^3+x^2-2 = (x^3-1) + (x^2-1) = (x-1)(x^2+x+1+x+1) =$$

$$= (x-1)(x^2+2x+2)$$

(nebo samozřejmě dělením $(x^3+x^2-2):(x-1) = x^2+2x+2$)

a tedy rozklad bude:

$$\frac{5x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}, \quad \text{pro } x \neq 1$$

a tedy $\quad 5x^2+2x+3 = A(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-1)$

a srovnáním koeficientů:

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{u } x^2: & A+B & = & 5 \\ \text{u } x: & 2A-B+C & = & 2 \\ \text{u } x^0: & 2A-C & = & 3 \end{array}\right\} \quad \text{soustava má řešení } \underline{A=2,\ C=1,\ B=3}$$

Tedy,

$$\int \frac{5x^2+2x+3}{x^3+x^2-2}\,dx = 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

$$= \underline{2\ln|x-1| + \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2) - 2\,\mathrm{arctg}(x+1) + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$x \neq -1$$

<u>a opět pro vyřešení integrálu</u>

$$\int \frac{3x+1}{x^2+2x+2}\,dx = (?)\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + (?)\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx$$

integrál chceme vyjádřit jako součet vhodných násobků (tj. LK) integrálů, které umíme – napíšeme si vždy tyto integrály a konstanty pak „doladíme" („všechna" „x" „musí" „být" v integrálu $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx$ a „druhý" integrál smí mít v čitateli jen $\underline{1}$ a členem tohoto integrálu je $\mathrm{arctg}\, x$ (nebo pro vyšší mocniny jmenovatele vzorec pro $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}$)

A jiště ukážu, že víme-li, kam chceme „dojít", pak můžeme integrál vyjádřit i s obecnými konstantami A, B, C a teprve pak A, B, C „spočítat":

$$\int \frac{5x^2+2x+3}{(x-1)(x^2+2x+2)}\,dx = \int \frac{A}{x-1}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= A\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{B}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + (C-B)\int \frac{1}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= A\ln|x-1| + \frac{B}{2}\ln(x^2+2x+2) + (C-B)\,\mathrm{arctg}\,(x+1) + c$$

(a dosadit pak $A=2$, $B=3$, $C=1$)

2) $\displaystyle\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx$:

zde poprvé je fce, která není ryze lomená, tedy je třeba vydělit $(x^4+1):(x^3-x^2+x-1)$ a pak též rozložit jmenovatele:

dostaneme:

$$\begin{array}{l} (x^4+1):(x^3-x^2+x-1) = x+1 \\ \underline{-(x^4-x^3+x^2-x)} \\ \quad x^3-x^2+x+1 \\ \underline{\quad -(x^3-x^2+x-1)} \\ \qquad\qquad 2 \end{array}$$

tj.: $\displaystyle\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x+1 + \frac{2}{x^3-x^2+x-1}$

a rozklad jmenovatele: $x^3-x^2+x-1 = x^2(x-1)+(x-1) = (x-1)(x^2+1)$

A tedy:

$$\underline{\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}\,dx} = \int (x+1)\,dx + \int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx =$$

$$\underline{= \frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \operatorname{arctg} x + K}, \quad K \in \mathbb{R}, \; x \neq -1$$

$$\int \frac{2}{(x+1)(x^2+1)}\,dx = \int \frac{A}{x+1}\,dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1}\,dx$$

$$= A\ln|x+1| + \frac{B}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx + C\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= A\ln|x+1| + \frac{B}{2}\ln(x^2+1) + C\operatorname{arctg}(x+1) + K$$

<u>A výpočet konstant A, B, C:</u>

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad , \text{tj.} \; (x \neq 1)$$

$$2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) \quad \text{a odtud:}$$

$$\left.\begin{array}{lrcl} \text{u } x^2: & A + B & = & 0 \\ \text{u } x: & -B + C & = & 0 \\ \text{u } x^0: & A \quad - C & = & 2 \end{array}\right\} \quad \text{řešení soustavy: } \underline{A = 1,\; B = -1,\; C = -1}$$

<u>A poznámka na závěr:</u>

„nemusíte" přečíst všechny příklady, že jsem „užitečně" „uvědomil „si cestu k cíli" a trochu natahoval i „delší".

A jako vždy píšu, že třeba najdete cestu lepší, než znám já, a také, pokud je něco nejasné, prosím, ozvěte se!